



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Județul Dolj, 7 februarie 2026
Clasa a-VIII-a

SUBIECTUL 1. (21p)

(12p) a. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - 5y + 3 = 0$ și $x \in [-3; 2]$. Arătați că:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5} = \sqrt{26}.$$

(9p) b. Comparați numerele reale x și y care verifică egalitatea:

$$x^2 + 2x\sqrt{3} + y^2 - 2\sqrt{3}y + 5 = 0.$$

SUBIECTUL 2. (21p)

Se consideră numerele reale $x, y, z \in (0, +\infty)$ cu proprietatea că $x + y + z = 5$.

(7p) a. Arătați că $xy + 5z = (x + z)(y + z)$.

(14p) b. Arătați că expresia $E(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+5z} + \frac{y-z}{yz+5x} + \frac{z-x}{zx+5y}$ este constantă.

SUBIECTUL 3. (21p)

Fie $(ABCD)$ un tetraedru și punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $S \in (BD)$, $T \in (AS)$. Notăm cu E și F simetricile punctelor D și B față de punctele M , respectiv N . Notăm $ET \cap (ABC) = \{P\}$ și $TF \cap (ACD) = \{Q\}$.

(14p) a. Dacă $PQ \parallel (BCD)$, demonstrați că punctul S este mijlocul lui (BD) .

(7p) b. Dacă S este mijlocul lui (BD) , demonstrați că $PQ \parallel (BCD)$.

Gazeta Matematică 10/2025 (enunț modificat)

SUBIECTUL 4. (21p)

Fie piramida $VABC$ în care M este mijlocul laturii BC și dreptele VM și AM sunt perpendiculare. Dacă $BC = VB = 2$ cm, $VM = \sqrt{3}$ cm și $\angle AVB = \angle AVC = 60^\circ$, calculați cosinusul unghiului dintre dreapta VA și planul (ABC) .

Gabriel Tica, Craiova

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă 16 puncte din oficiu
- Timpul de lucru este de 3 ore



Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 7 februarie 2026
clasa a VIII-a

Subiectul 1.	
a) Relația este echivalentă cu: $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{26}$	2p
Din $x - 5y + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{(5y)^2 + y^2} + \sqrt{26(y-1)^2} = \sqrt{26}$	
$\Leftrightarrow \sqrt{26}(\sqrt{y^2} + \sqrt{(y-1)^2}) = \sqrt{26}$	2p
Astfel $\sqrt{26}(y + y-1) = \sqrt{26} \Leftrightarrow y + y-1 = 1$	2p
Din $x \in [-3; 2]$ găsim $y \in [0; 1]$	2p
Deci $ y = y$ și $ y-1 = 1-y$	2p
Concluzia	2p
b) $(x + \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 1$	2p
$\Rightarrow (x + \sqrt{3})^2 \leq 1, (y - \sqrt{3})^2 \leq 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{3} \leq 1$ și $ y - \sqrt{3} \leq 1$	2p
Deci $-1 \leq x + \sqrt{3} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3} - 1 \leq x \leq -\sqrt{3} + 1$	2p
$-1 \leq y - \sqrt{3} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 1 \leq y \leq \sqrt{3} + 1$	2p
Găsim $x_{\max} = -\sqrt{3} + 1, y_{\min} = \sqrt{3} - 1$, de unde $x < y$	1p
TOTAL	21p
Subiectul 2	
a) $xy + 5z = xy + z(x + y + z) = xy + zx + zy + z^2$	3p
$xy + 5z = x(y + z) + z(y + z) = (x + z)(y + z)$	4p
$E(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+5z} + \frac{y-z}{yz+5x} + \frac{z-x}{zx+5y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(y+x)(z+x)} + \frac{z-x}{(z+y)(x+y)}$	6p
$E(x, y, z) = \frac{x^2-y^2}{(x+z)(y+z)(x+y)} + \frac{y^2-z^2}{(y+x)(z+x)(y+z)} + \frac{z^2-x^2}{(z+y)(x+y)(z+x)}$	6p
$E(x, y, z) = 0$	2p
TOTAL	21p



Subiectul 3	
<p>a) Fie $ES \cap BC = \{R\}, FS \cap CD = \{V\}$. Cum $PQ \parallel (BCD), RV, EF \subset (BCD) \Rightarrow PQ \parallel RV, PQ \parallel EF \Rightarrow RV \parallel EF$</p> <p>În $\triangle SEF, RV \parallel EF \xrightarrow{T.Th.} \frac{SR}{RE} = \frac{SV}{VF}$</p> <p>Aplicăm Teorema Menelaus în $\triangle EDS$ și transversala $M - R - B$ $\Rightarrow \frac{EM}{MD} \cdot \frac{DB}{BS} \cdot \frac{SR}{RE} = 1 \Rightarrow \frac{DB}{BS} \cdot \frac{SR}{RE} = 1$</p> <p>Aplicăm Th. Menelaus în $\triangle FBS$ și transversala $N - V - D$ $\Rightarrow \frac{FN}{NB} \cdot \frac{BD}{SD} \cdot \frac{SV}{VF} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{SD} \cdot \frac{SV}{VF} = 1$</p> <p>Obținem: $\frac{DB}{BS} \cdot \frac{SR}{RE} = \frac{BD}{SD} \cdot \frac{SV}{VF}$</p> <p>Cum $\frac{DB}{BS} \cdot \frac{SR}{RE} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{BS} = \frac{BD}{DS} \Rightarrow BS = DS$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
<p>b) $BS = SD, EM = MD, ES \cap BC = \{R\}, R$ – centru de greutate în $\triangle EBD \Rightarrow \frac{ER}{RS} = 2$</p> <p>$BS = SD, BN = NF, FS \cap CD = \{V\}, V$ – centru de greutate în $\triangle BDF \Rightarrow \frac{FV}{VS} = 2$</p> <p>Din $\frac{ER}{RS} = \frac{FV}{VS} = 2 \xrightarrow{R.T.Th} RV \parallel EF, RV \subset (ARV) \Rightarrow EF \parallel (ARV)$</p> <p>$EF \parallel (ARV), PQ \subset (ARV) \Rightarrow EF \parallel PQ$</p> <p>$EF \parallel PQ, EF \subset (BCD) \Rightarrow PQ \parallel (BCD)$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
TOTAL	21p
Subiectul 4	
<p>$BM = MC = 1 \text{ cm}$</p> <p>În $\triangle VMB: VM^2 + MB^2 = VB^2 \xrightarrow{R.T.P} \sphericalangle VMB = 90^\circ$</p> <p>$VM \perp AM, VM \perp BC; AM, BC \subset (ABC) \Rightarrow VM \perp (ABC)$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p>



$pr_{(ABC)}VA = AM \Rightarrow \sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, AM) = \sphericalangle VAM$	2p
În $\triangle VBC$, VM – înălțime și mediană $\Rightarrow \triangle VBC$ isoscel cu $VB = VC$ $\triangle VBC$ isoscel	2p
cu $VB = VC$, dar $VB = BC \Rightarrow \triangle VBC$ echilateral	2p
Deoarece $\triangle AVB \equiv \triangle AVC$ (L.U.L.) $\Rightarrow AB = AC$; dar M mijlocul lui $BC \Rightarrow AM \perp BC$	1p
În $\triangle AMC$ ^{Th.P.} $\Rightarrow AC^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow AC^2 = AM^2 + 1$	2p
În $\triangle VAC$ ^{Th.cosinus} $\Rightarrow AC^2 = VA^2 + VC^2 - 2 \cdot VA \cdot VC \cdot \cos(\sphericalangle AVC) \Rightarrow AC^2 = VA^2 + 4 - 2 \cdot VA$.	2p
Astfel $AM^2 + 1 = VA^2 + 4 - 2 \cdot VA$	
În $\triangle VMA$ ^{Th.P.} $\Rightarrow VA^2 = AM^2 + VM^2 = 3 + AM^2$	2p
Deci: $VA^2 - 3 + 1 = VA^2 + 4 - 2 \cdot VA \Rightarrow VA = 3 \text{ cm}$	
Obținem: $AM = \sqrt{6} \Rightarrow \cos(\sphericalangle VAM) = \frac{\sqrt{6}}{3}$	2p
	2p
TOTAL	21p